# PARAGRAAF 13.0 : LIMIETEN EN ABSOLUTE WAARDE

## LES 1 : ABSOLUTE WAARDE

### DEFINITIE ABSOLUUTTEKENS

- $|p| =$ { p absoluut of de absolute waarde van p }
- $|p| =$ { altijd positief }
- $|p| = \begin{cases} p & als\ p \geq 0 \\ -p & als\ p < 0 \end{cases}$

### VOORBEELD 1

Teken de grafiek van $f(x) = |10 - 2x|$

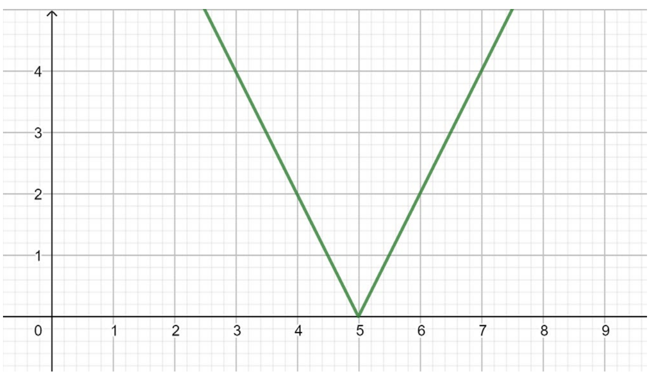
### OPLOSSING 1

$|10 - 2x| = \begin{cases} 10 - 2x & als\ 10 - 2x \geq 0 \\ -(10 - 2x) & als\ 10 - 2x < 0 \end{cases}$ oftewel

$|10 - 2x| = \begin{cases} 10 - 2x & als\ -2x \geq -10 \\ -10 + 2x & als\ -2x < -10 \end{cases}$ oftewel

$|10 - 2x| = \begin{cases} 10 - 2x & als\ x \leq 5 \\ -10 + 2x & als\ x > 5 \end{cases}$

Dit geeft de volgende grafiek



## LES 2 : ASYMPTOTEN

### DEFINITIE ASYMPTOTEN

Er zijn twee soorten asymptoten :

**(1)** Horizontale Asymptoot (HA)

- $\lim_{x \to \infty} f(x) \;\; of \;\; \lim_{x \to -\infty} f(x)$ (d.w.z. voor x een groot getal invullen)
- Vergelijking : y = getal

**(2)** Verticale Asymptoot (VA)

- Noemer = 0
- Vergelijking : x = getal

### VOORBEELD 1

Bepaal alle asymptoten en schets de grafiek van $f(x) = \frac{60x-24}{|3x+6|}$

### OPLOSSING 1

Eerst de formule splitsen :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{60x-24}{3x+6} & als\ 3x+6 \geq 0 \\ \frac{6x-24}{-(3x+6)} & als\ 3x+6 < 0 \end{cases}$$

oftewel

$$f(x) = \begin{cases} \frac{60x-24}{3x+6} & als\ x \geq -2 \\ \frac{60x-24}{-3x-6} & als\ x < -2 \end{cases}$$

Nu kun je pas de asymptoten bepalen

**(1)** Horizontale Asymptoot (HA)

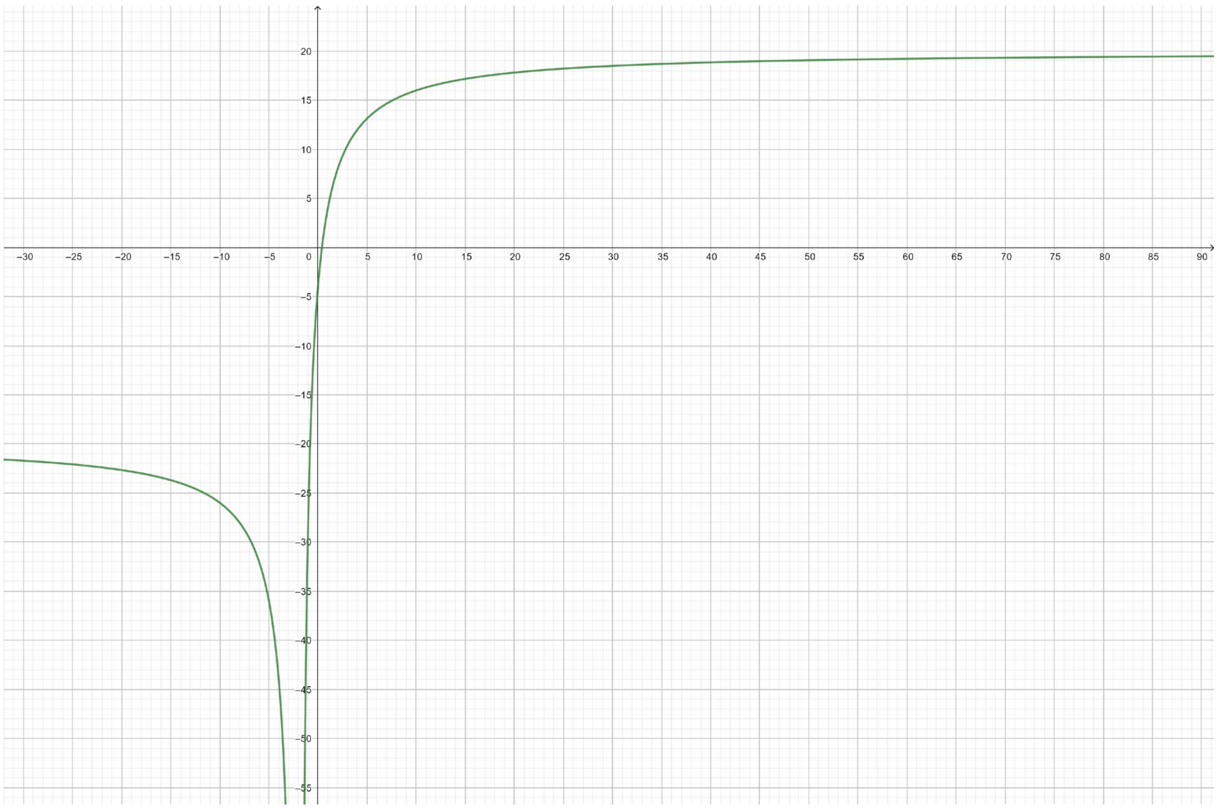
**1.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{60x-24}{3x+6} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{60-\frac{24}{x}}{3+\frac{6}{x}} = \frac{60-0}{3+0} = 20$ Dus HA : y = 20

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{60x-24}{-3x-6} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{60-\frac{24}{x}}{-3-\frac{6}{x}} = \frac{60-0}{-3-0} = -20$ Dus HA : y = -20

**(2)** Verticale Asymptoot (VA)

$3x + 6 = 0 \to x = -2.$ Dus VA : x = -2

Nu kun je de grafiek tekenen :



## PARAGRAAF 13.1 : EVENREDIGHEID EN INVERSE

### LES 1 : EVENREDIGHEID

#### DEFINITIES

**(1)** y is evenredig met x → $y = a \cdot x$

**(2)** y is omgekeerd evenredig met → $y = \frac{a}{x}$

#### VOORBEELD 1

Gegeven is dat 2 + y omgekeerd evenredig is met $\frac{x}{x-5}$. Voor $x = 3$ is $y = 0{,}2$.

Stel de formule van y op in de vorm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

#### OPLOSSING 1

**(1)** Omgekeerd evenredig dus $2 + \mathrm{y} = \frac{a}{\frac{x}{x-5}}$ . Dit gaan we omschrijven

$$2 + \mathrm{y} = \frac{a}{1} \cdot \frac{x-5}{x}$$

$$2 + \mathrm{y} = \frac{a(x-5)}{x}$$

$$\mathrm{y} = \frac{ax-5a}{x} - 2$$

**(2)** Je weet dat bij x = 3 is y = 0,2, Invullen geeft :

$$0{,}2 = \frac{3a-5a}{3} - 2$$

$$2{,}2 = \frac{-2a}{3}$$

$$6{,}6 = -2a$$

$$a = -3{,}3$$

**(3)** Vul dit in bij de formule van **(1)** :

$$\mathrm{y} = \frac{-3{,}3x+16{,}5}{x} - 2$$

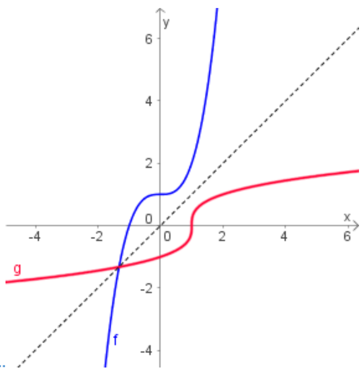
$$\mathrm{y} = \frac{-3{,}3x+16{,}5}{x} - \frac{2x}{x}$$

$y = \frac{-5{,}3x+16{,}5}{x}$

## LES 2 : INVERSE

### DEFINITIE

**(1)** De grafieken van f en $f^{inv}$ zijn elkaars spiegelbeeld in y = x
**(2)** De inverse van f en f heffen elkaar op, dus finv van f(3) is 3.
**(3)** Voorbeelden :
$f(x) = x^2 \;\rightarrow\; f^{inv}(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = e^x \;\rightarrow\; f^{inv}(x) = \ln{(x)}$
**(4)** De snijpunten van f en $f^{inv}$ liggen op de lijn y = x.
Dit betekent dat je deze kunt berekenen door f(x) = x op te lossen !!! (of $f^{inv}$ = x)




### VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \frac{2x}{x-3}$

**a.** Bereken de inverse van f.
**b.** De grafieken snijden elkaar in de punten A en B. Bereken exact deze coördinaten.

### OPLOSSING 1

**a.** De inverse bereken je door de x en de y te verwisselen en deze weer te schrijven als y = :

$y = 2 + \frac{2x}{x-3} \quad \rightarrow x = 2 + \frac{2y}{y-3}$

$x - 2 = \frac{2y}{y-3}$

$(x-2)(y-3) = 2y$

$xy - 3x - 2y + 6 = 2y$

$xy - 4y = 3x - 6$

$y(x-4) = 3x - 6$

$y = \frac{3x-6}{x-4}$ Dus $f^{inv}(x) = \frac{3x-6}{x-4}$

**b.** $2 + \frac{2x}{x-3} = x$ (of $\frac{3x-6}{x-4} = x$)

$\frac{2x}{x-3} = x - 2$

$(x-2)(x-3) = 2x$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$(x-1)(x-6) = 0$

$x = 1 \;\; v \;\; x = 6$ Dus A(1,1) en B(6,6)

## PARAGRAAF 13.2 : ASYMPTOTEN

### DEFINITIE ASYMPTOTEN

Er zijn eigenlijk drie soorten asymptoten :

**(1)** Horizontale Asymptoot (HA)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = getal \;\; of \;\; \lim_{x \to -\infty} f(x) = getal$$

**(2)** Verticale Asymptoot (VA)
Noemer = 0

**(3)** Scheve Asymptoot (SA)
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$
Macht teller = Macht noemer + 1
SA bepalen m.b.v. een staartdeling

### OPMERKING

Als een grafiek een HA heeft is er geen SA en andersom !!!

### VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x^2+8x+9}{x+3}$

**a.** Stel de formule op van elke asymptoot van de grafiek van f.
**b.** Bereken exact de extreme waarden van f.

## OPLOSSING 1

**a.** We kijken naar de asymptoten. Omdat de teller één hoger is dan de noemer is er een SA en GEEN HA :

**(2)** VA x + 3 = 0 → x = -3

**(3)** Scheve Asymptoot (SA) (Gebruik een staartdeling)

$$x+3\ /3x^2+8x+9\backslash\ 3x-1$$
$$\underline{3x^2+9x}$$
$$-1x+9$$
$$\underline{-1x-3}$$
$$+12$$

Dus $f(x) = 3x - 1 + \frac{12}{x+3}$

Omdat $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{12}{x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{12}{x}}{1+\frac{3}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0$ is er een SA : $y = 3x - 1$.

**b.** Toppen bepalen :

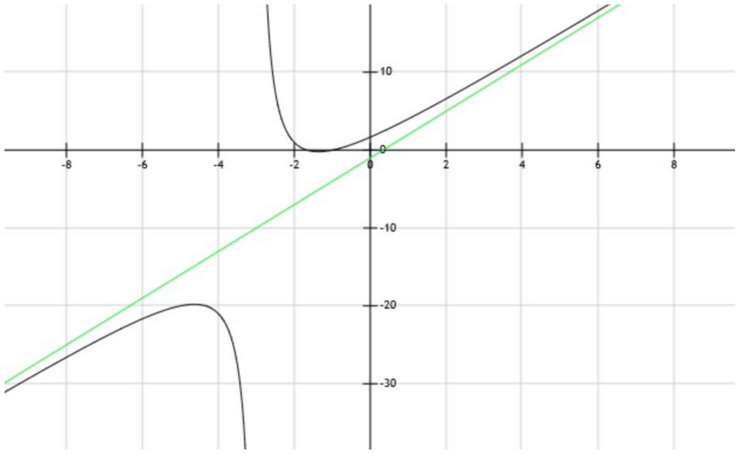
$f(x) = 3x - 1 + \frac{12}{x+3} = 3x - 1 + 12(x+3)^{-1}$

$f`(x) = 3 - 122(x+3)^{-2} = 3 - \frac{12}{(x+3)^2} = 0$

$$\frac{-12}{(x+3)^2} = -3$$
$$-3(x+3)^2 = -12$$
$$-3x^2 - 18x - 27 = -12$$
$$-3x^2 - 18x - 15 = 0$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(x+1)(x+5) = 0$$
$$x+1 = 0 \quad \vee \quad x+5 = 0$$
$$x = -1 \quad \vee \quad x = -5$$

max is f(-5) = -20

min is f(-1) = 0



# PARAGRAAF 13.3 : LIMIETEN EN PERFORATIES

## LES 1 CONTINUÏTEIT

### DEFINITIE ASYMPTOTEN

- Een functie is ***continu*** als linkerlimiet = rechterlimiet oftewel $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = c$
- Er geldt dan dat $f(a) = c$

### VOORBEELD 1

- Gegeven $f(x) = \begin{cases} 10x^2 - a & als\ x < 3 \\ \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) + 8 & als\ x \geq 3 \end{cases}$

Bereken voor welke a $f(x)$ continu is. Geef ook de coördinaten van de perforatie.

### OPLOSSING 1

De limieten moeten gelijk zijn :

**(1)** $\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} 10x^2 - a = 10 \cdot 3^2 - a = 90 - a$

**(2)** $\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) + 8 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot 3\right) + 8 = -1 + 8 = 7$

Dus $90 - a = 7 \ \rightarrow a = 83$

Perforatie = $(3,7)$

## LES 2 PERFORATIES EN ASYMPTOTEN

### DEFINITIE GEBROKEN FUNCTIE EN = 0

Bij een gebroken functie $f(x) = \frac{teller}{noemer} = \frac{t(x)}{n(x)}$ kunnen 3 gevallen onderscheiden worden :

**(1)** Teller = 0 en noemer ≠ 0 → Snijpunten met de x-as
**(2)** Teller ≠ 0 en noemer = 0 → Verticale asymptoot
**(3)** Teller = 0 en noemer = 0 → Perforatie

### VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x^2-9x+5}{2x+a}$.

Bereken de waarde(n) van a waarvoor er een perforatie kan optreden. Bereken ook het bijbehorende punt.

### OPLOSSING 1

Voor een Perforatie geldt :

Noemer = 0 en Teller = 0.
$2x + a = 0$ $4x^2 - 9x + 5 = 0$

**(1)** Je kunt de x-en berekenen bij de Teller :

$$4x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$(x - \frac{5}{4})(x - 1) = 0$$

$$x = \frac{5}{4} \;\; v \;\; x = 1$$

**(2)** Invullen in de Noemer geeft de waarden van a :

$x = \frac{5}{4} \rightarrow 2 \cdot \frac{5}{4} + a = 0 \rightarrow a = -\frac{10}{4} = -2\frac{1}{2}$
$x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 + a = 0 \rightarrow a = -2$

Nu per stuk even uitrekenen :

**(3)** $a = -2 \quad \to x = 1$

$$f(x) = \frac{4x^2 - 9x + 5}{2x - 2} = \frac{4\left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}\right)}{2(x-1)} = \frac{4(x-1)\left(x - \frac{5}{4}\right)}{2(x-1)} = \frac{4\left(x - \frac{5}{4}\right)}{2} = 2x - 2\frac{1}{2}$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x - 2\frac{1}{2} = 2 - 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ Dus punt = (1, -½)

**(4)** $a = -2\frac{1}{2} \quad \to x = 1\frac{1}{4}$

$$f(x) = \frac{4x^2 - 9x + 5}{2x - 2\frac{1}{2}} = \frac{4\left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}\right)}{2\left(x - 1\frac{1}{4}\right)} = \frac{4(x-1)\left(x - \frac{5}{4}\right)}{2\left(x - \frac{5}{4}\right)} = \frac{4(x-1)}{2} = 2x - 2$$

$\lim_{x \to 1\frac{1}{4}} f(x) = \lim_{x \to 1\frac{1}{4}} 2x - 2 = 2\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ Dus punt = (1¼ , ½)

## OPMERKING

Als in de teller ook een a staat werkt deze methode niet. Dan is het beter om de x uit te drukken in a en deze in de teller in te vullen.

### VOORBEELD 2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x^2-9x-2a}{2x+a}$.

Bereken de waarde(n) van a waarvoor er een perforatie kan optreden. Bereken ook het bijbehorende punt.

### OPLOSSING 2

Druk x uit in a en los op :

**(1)** Noemer = 0

$2x + a = 0$

$2x = -a \;\rightarrow x = -\frac{1}{2}a$

**(2)** $x = -\frac{1}{2}a$ invullen in Teller = 0:

$$4x^2 - 9x - 2a = 0 \;\rightarrow 4\left(-\frac{1}{2}a\right)^2 - 9 \cdot -\frac{1}{2}a - 2a = 0$$

$$a^2 + 2\frac{1}{2}a = 0$$

$$a(a + 2\frac{1}{2}) = 0$$

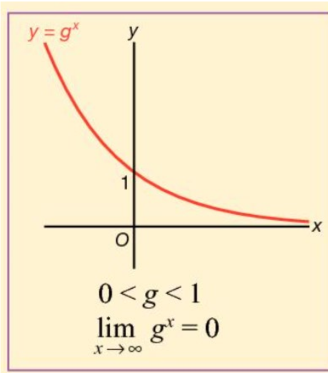
$$a = 0 \;\; v \;\; a = -2\frac{1}{2}$$

Nu kun je per stuk de x-en en de perforatie uitrekenen.

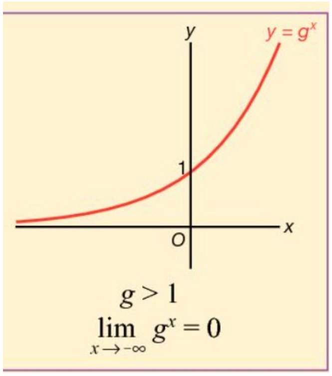
## PARAGRAAF 13.4 : LIMIETEN BIJ EXPONENTIËLE / LOGARITMISCHE

### EIGENSCHAPPEN $f(x) = a^x \ (of\ e^x)$

**(1)** Groeifactor g < 1




**(2)** Groeifactor g > 1 ( ook $e^x$ )




**(3)** Bij het berekenen van de horizontale asymptoten (limieten naar ±∞) moet je delen door de hoogste macht van $a^x$

### VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2e^x-1}{e^x-e}$. Bereken de asymptoten.

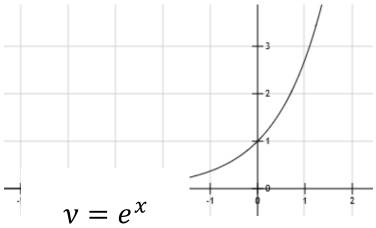
### OPLOSSING 1

**(1)** VA

noemer = 0 $\wedge$ teller ≠ 0

$e^x - e = 0 \ \wedge \ 2e^x - 1 \neq 0$

$e^x = e^1$




Verticale asymptoot: x = 1

**(2)** HA

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x-1}{e^x-e} = \frac{2\cdot 0-1}{0-e} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^x-1}{e^x-e} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{e}{e^x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$\boxed{e^{-\infty} = 0}$ $\boxed{\frac{1}{e^x} = e^{-x}}$

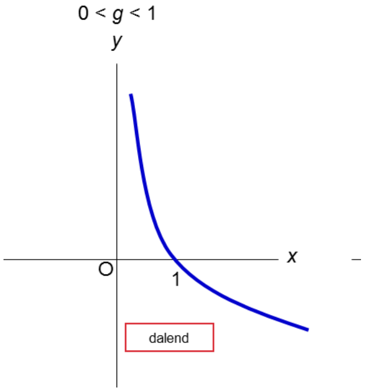
Horizontale asymptoten: $y = \frac{1}{e}$ $en$ $y = 2$

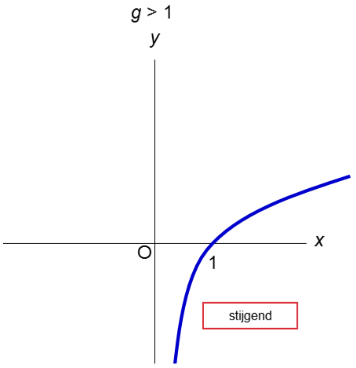
## EIGENSCHAPPEN $f(x) = {}^{g}log(x)$ $(of\ \ln(x))$

**(1)** Groeifactor g < 1

**(2)** Groeifactor g > 1 ( ook $e^x$ )

De standaardgrafiek $y = {}^{g}\log(x)$




$$\lim_{x \downarrow 0} {}^{g}\log(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} {}^{g}\log(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow 0} {}^{g}\log(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} {}^{g}\log(x) = \infty$$

**(3)** Bij het berekenen van de limieten met als uitkomst $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ moet je delen door de hoogste macht van ${}^{g}\log(x)$.

### VOORBEELD 2

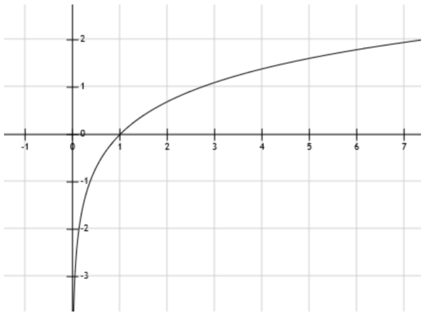
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x)-1}$.

**a.** Bereken de asymptoten.

**b.** Bereken $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$.

### *Oplossing 2*

Vooraf kijk je naar de grafiek van $y = \ln(x)$



**(1)** $Als\ x \to \infty \quad dan \quad ln(x) \to \infty\ en\ \frac{1}{\infty} = 0$

**(2)** $Als\ x \downarrow 0\ dan\ \ln(x) \to -\infty\ en\ \frac{1}{-\infty} = 0$

**a.** VA :

| | | |
|---|---|---|
| noemer = 0 | ∧ | teller ≠ 0 |
| $ln(x) - 1 = 0$ | ∧ | $ln\,(x^2) \neq 0$ |
| $ln(x) = 1$ | | |
| $x = e$ | → | $VA: \ x = e$ |

HA :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ln\,(x^2)}{ln(x)-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ln\,(x)}{ln(x)-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{ln\,(x)}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

{ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ bestaat niet want het domein van ln(x) = $\langle 0, \to \rangle$ }

$HA: y = 2$

**b.** $$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{ln\,(x^2)}{ln(x)-1} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\,ln\,(x)}{ln(x)-1} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{2}{1-\frac{1}{ln\,(x)}} = \frac{2}{1-0} = 2$$